UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 21 y 23 de abril de 2009.

Tema :
Matrices. Operaciones con matrices. Ejemplos.
Operaciones elementales de fila. Matriz escalonada y escalonada reducida.
Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de Gauss y Gauss Jordan.
Secciones 1.3, 1.5, 1.6 del texto (*)
[(*) S.Grossman : "Algebra lineal" 5a edición]

E1.-Dadas las siguientes matrices, diga, justificando, si hay algún par de matrices iguales :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} ;\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} ;\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} ;\ E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

E2.- Dadas las matrices : $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, halle :

2a) A+2B ; **2b)** 3A- B ; **2c)** 5C ; **2d)** A+C ; **2e)** 2A+3B+7C .

E3.- Dadas las matrices : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 2 & y \\ 0 & z & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, halle, si posible, valores para las constantes x, y, z, de manera que se tenga : A+B= C .

E4.- Halle la matriz X, de tamaño 2x3, que cumple con la condición : 3A-X = B , siendo

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; diga, justificando, si X es única o no.

E5.- Dadas las siguientes matrices :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, halle los siguientes productos "filas por columnas" :

5a) AB , 5b) BA , 5c) AC , 5d) EB , 5e) CE , 5f) EC , 5g) AA (= A^2) , 5h) CC (=C^2) .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E6.- Diga (explicando) para cuales pares de matrices de tamaño nxn se cumple que :

$(A+B)(A-B)= A^2- B^2$

[tome en cuenta que el producto de matrices "filas por columnas" tiene la propiedad distributiva respecto a la suma de matrices, pero no tiene la propiedad conmutativa] .

E7.- Se indica con I_n (y se llama una "matriz identidad de tamaño nxn ") la matriz

(con igual número de filas y columnas) cuya genérica componente es $d_{i,k} = 0$, si $i \neq k$,

$d_{i,k} = 1$, si i=k . Por ejemplo, las matrices "identidad" de tamaños 1x1, 2x2, 3x3 son, respectivamente :

$$I_1=[1] \ , \ I_2= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ I_3= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Verifique que multiplicando cualquier matriz A, de tamaño 3x4, por la matriz I_3, a la izquierda o por la matriz I_4 a la derecha , se obtiene: $I_3A= A$, $AI_4=A$

Definiciones importantes.
Def.1
Matrices equivalentes por filas.
Dos matrices A, B se dicen equivalentes por filas si y sólo si son del mismo tamaño y además B se puede obtener a partir de A aplicando convenientes operaciones elementales de fila.
Def.2
Sistemas equivalentes.
Dos sistemas de ecuaciones lineales, (con el mismo número, n, de incógnitas) se dicen sistemas equivalentes si y sólo si tienen el mismo conjunto de soluciones

E8.- Verifique que la equivalencia por filas (de matrices de un mismo tamaño)es una relación de equivalencia (es decir : es una relación reflexiva, simétrica y transitiva).
[sugerencia : tome en cuenta que si la matriz B se obtiene a partir de A por medio de una operación elemental de fila, entonces A se puede obtener a partir de B por medio de una conveniente operación elemental de fila].

E9.- Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, escriba la matriz A de los coeficientes (de las incógnitas), la matyriz "columna", **b** de los números del segundo miembro de las ecuaciones y la matriz aumentada (o ampliada) A' , de manera que el sistema se pueda escribir en forma matricial como A**x**=**b** , siendo **x** la matriz "columna" de las incógnitas.

A título de ejemplo, dado el sistema :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ la matriz, A, de los coeficientes, es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,la matriz columna de los números del segundo miembro de las ecuaciones es **b** = $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$,

la matriz ampliada es A' = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ y la ecuación matricial que representa el sistema dado es : A**x**= **b** , siendo **x**= $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ la matriz columna de las incógnitas.

9a) $\begin{cases} 2x+3y-z+t=8 \\ x+z=9 \\ -y+z+5t=0 \end{cases}$; **9b)** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_5=0 \\ x_3+x_4-x_6=0 \end{cases}$; **9c)** $\begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ **.**

E10.- Aplique a cada una de las tres matrices aumentadas del ejercicio anterior convenientes operaciones elementales de fila, hasta que la matriz de coeficientes quede en forma escalonada reducida.[**nota** : la que debe quedar en forma escalonada reducida es la <u>matriz de los coeficientes</u>, no la matriz aumentada].

E11.- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

11a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x+2y+3z=5 \\ 4y+5z=6 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$; **11b)** $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$; **11c)** $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}$;

11d) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_4-x_5=2 \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4+4x_5=1 \end{cases}$; **11e)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_4-x_5=2 \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4+4x_5=-2 \end{cases}$;

11f) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_4-x_5=2 \\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4+4x_5=k \end{cases}$; **11g)** $\frac{x-1}{3} = \frac{2y+1}{5} = z+7$.

E12.- Sean A, B dos matrices de tamaño 4x5, <u>equivalentes por filas</u>, y sea **b** un vector columna de tamaño 4x1. Sea además **b*** el vector columna que se obtiene efectuando sobre **b** las mismas operaciones de fila que se efectuaron sobre A hasta obtener B.
Explique por qué los sistemas de ecuaciones lineales (representados en forma matricial por) A**x**=**b** , B**x**=**b*** tienen las **mismas soluciones**

E13.- Dado un sistema de ecuaciones lineales, A**x**=**b**, se efectúan ciertas operaciones elementales de fila sobre la matriz aumentada del sistema, hasta que la matriz de coeficientes

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

quede en forma escalonada, obteniendo un nuevo sistema A***x**=**b***(que tiene las mismas soluciones que el sistema inicial). Explique con detalle como se puede averiguar, mediante la matriz A*, cual de las tres siguientes situaciones se presenta :

i) el sistema no tiene ninguna solución (es decir : es inconsistente);
ii) el sistema tiene una sola solución (es consistente, con solución única);
iii) el sistema tiene un número infinito de soluciones (es consistente con infinitas soluciones).

14.- Antes de resolver este ejercicio es conveniente que Usted haya resuelto un número considerable de ejercicios sobre resolución de sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss y/o Gauss-Jordan [por ejemplo ejercicios de las secciones 1.3 (pag.25 del texto) y 1.4 (pag. 42 del texto)].

Halle para cuales valores de las constantes a, b, los siguientes sistemas tienen :
i) solución única, ii) infinitas soluciones o iii) ninguna solución :

14a) $\begin{cases} 2x+2y+7z = 1 \\ x+4z = 1 \\ x+2y+3z = 0 \\ x+(a^2+3)z = a+2 \end{cases}$; **14b)** $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+(a^2+a)x_5 = b \\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5 = a \end{cases}$;

14c) $\begin{cases} x_1+x_2+3ax_3 = 0 \\ x_1+x_2+(a+2b)x_3 = 0 \\ x_1+bx_3 = 0 \end{cases}$; **14d)** $\begin{cases} x_1+x_2+3a^2x_3 = a \\ x_1+x_2+(a^2+2b^2)x_3 = b \\ x_1+b^2x_3 = 1 \end{cases}$.

E15.- Diga, justificando, cuales de las siguientes afirmacionews son ciertas y cuales falsas :

15a) Si A es una matriz de tamaño nxn y si el sistema de ecuaciones lineales homogéneas A**x**=**0** tiene solución única, entonces dado cualquiera vector columna (de tamaño nx1), el sistema A**x**=**b** es consistente y tiene solución única;

15b) Si el sistema A**x** = **0** tiene infinitas soluciones, entonces el sistema A**x** = **b** también tiene infinitas soluciones;

15c)- Si el sistema A**x** = **b** tiene infinitas soluciones, entonces el sistema A**x** = **0** también tiene infinitas soluciones;

15d) Todo sistema con mas incógnitas que ecuaciones, tiene necesariamente infinitas soluciones;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

15e). Si A es una matriz de tamaño 5x3 entonces el sistema A**x** = **0** tiene necesariamente solución única.

15f).- Si en una matriz escalonada, obtenida a partir de A con operaciones elementales de filas, hay más columnas que pivotes, entonces el sistema del tipo A**x** = **0** tiene infinitas soluciones.

Soluciones.

SE1.- No hay dos matrices iguales, ya que para que dos matrices sean iguales deben tener el mismo tamaño y, además, las componentes de igual puesto (fila #i , columna #j) deben ser iguales.A título de ejemplo, A es diferente de D, E, F por tener tamaño diferente; $A \neq B$ por ser $A_{1,1}=1 \neq B_{1,1}=2$.

SE2.- $A+2B = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$, $3A-B = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$, $5C= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 25 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$,

A+C, 2A+3B+7C **no estan definidas** ya que sólo se pueden sumar matrices del mismo tamaño.

SE3.- x=4, y=3, z= -1.

SE4.- $X = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 20 & -6 & 4 \end{bmatrix}$; la matriz pedida es única, ya que si se tiene $3A-X_1=B$, $3A-X_2=B$, entonces sigue : $3A-X_1=3A-X_2 \Rightarrow -X_1= -X_2 \Rightarrow X_1=X_2$.

SE5.- $AB= \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 25 & 22 \end{bmatrix}$; $BA= \begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}$; $AC= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 11 \\ 15 & 16 & 25 \end{bmatrix}$, $EB= \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 16 \\ 11 & -8 \end{bmatrix}$,

$CE= \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; $EC= \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 16 \\ 10 & 5 & -6 \end{bmatrix}$; $A^2= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$; C^2 **no está definido.**

SE6.- Usando la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices respecto a la suma, tenemos : $(A+B)(A-B) = (A+B)A - (A+B)B = AA+BA-AB-BB= A^2-B^2+(BA-AB)$;
la matriz BA-AB generalmente **no es** la matriz nula y por lo tanto generalmente $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA1116 abril-julio de 2009**
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

por ejemplo si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ como en el ejercicio **5**,

tenemos BA-AB= $\begin{bmatrix} 13 & 22 \\ 13 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 25 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

y por consiguiente $(A+B)(A-B)= A^2-B^2+(BA-AB)\neq A^2-B^2$.
Si por suerte se tiene CD=DC, como es el caso de las dos matrices $C= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$,
$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $(C+D)(C-D)=C^2-D^2$.

SE7.- Consideremos, por ejemplo $C= AI_4$. Entonces :
$C_{s,k} = A_{s,1}d_{1,k}+A_{s,2}d_{2k}+A_{s,3}d_{3,k}$;
así por ejemplo si k=2 se tiene : $d_{1,k}=d_{1,2}=0$, $d_{2k}=d_{22}=1$, $d_{3,k}=d_{3,2}=0$, de manera que el único sumando que no necesariamente se anula es : $A_{s,2}d_{2k}=A_{s,2}\ .1 =A_{s,2}$
de manera que $C_{s,2} = A_{s,2}$; de manera análoga se constata que $C_{s,k} = A_{s,k}$
para todas las componentes de las matrices C, A.
Por lo tanto las dos matrices A, $C= AI_4$ son iguales, ya que tienen el mismo tamaño y además tienen todas sus componentes (de igual puesto) iguales.

SE8.- Observemos que si <u>e</u> es cualquier operación elemental de fila entonces existe una operación elemental de fila inversa, e^{-1}, de <u>e</u> . En efecto :
si e = " $R_i \Leftrightarrow R_s$ " (intercambio de dos filas) entonces $e^{-1}=e$;
si e= " $R_i \Rightarrow k.R_i$ " (multiplicar la fila i-ésima por la constante $k\neq 0$) entonces

e^{-1} = " $R_i \Rightarrow \frac{1}{k}.R_i$ " ;

si e= " $R_i \Rightarrow R_i+k.R_s$" , con $i\neq s$,(sumarle a la fila i-ésima otra fila multiplicada por una constante), entonces e^{-1} = " $R_i \rightarrow R_i - k.R_s$" .
Si indicamos con e(A) la matriz que se obtiene efectuando la operación elemental <u>e</u> sobre la matriz A, entonces se tiene $e(A)=B \Rightarrow e^{-1}(B)=A$.
Decir que " A es equivalente por filas a la matriz B " significa (por definición) que la matriz B se puede obtener efectuando ciertas operaciones elementales de fila, e_1, e_2, ... e_n sobre la matriz A, es decir : $B= e_1(e_2(\dots (e_n(A))\dots)$.
<u>Reflexividad</u> : A= (por ejemplo) $e^{-1}(e(A))$;
<u>Simetría</u> : si $B= e_1(e_2(\dots (e_n(A))\dots)$ entonces $A=e_n^{-1}(e_{n-1})^{-1}(\dots (e_1^{-1}(B))\dots)$;
por ejemplo, si B se obtiene sumando a la primera fila en A dos veces la segunda fila y luego intercambiando la primera fila con la cuarta, entonces A se puede obtener de B intercambiando primero la primera fila con la cuarta y luego restando a la primera fila dos veces la segunda.
<u>transitividad</u> : si $B=e_1(e_2(\dots (e_n(A))\dots)$ y si $C=g_1(g_2(\dots (g_s(B))\dots)$, entonces $C=g_1(g_2(\dots (g_s(e_1(e_2(\dots (e_n(A))\dots)))\dots)$;
por ejemplo, si B se obtiene efectuando sobre A las dos operaciones elementales e_1,e_2
y C se obtiene efectuando sobre B la operación elemental e_3 , entonces $C=e_3(e_2(e_1(A)))$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE9.- 9a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$;

9b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$;

9c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

SE10.- 10a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{-25}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{8} \end{bmatrix}$; **10b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; **10c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

SE11.- 11a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

11b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ como en la tercera columna de la matriz

escalonada [columna que corresponde as la incógnita z] no hay pivote, se le puede dar a z un valor arbitrario,

por ej. $z=\lambda \Rightarrow y=\lambda$, $x=\lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

11c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

11d,e,f) En estos tres sistemas, la matriz de coeficientes es la misma y la columna de los números del segundo miembro es : $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$ en 11f) y la misma con k=1 en 11d), k=-2 en 11e) . Por lo tanto conviene resolver el sistema 11f) y averiguar luego que pasa según el valor que tenga la constante k.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$ aunque falte dividir la segunda fila poe 3, se puede ver que el sistema es consistente únicamente si k+2=0 . Entonces ya podemos decir que **el sistema 11d) no tiene solución**
(es inconsistente) mientras que el sistema **11e) es consistente y además tiene un número infinito de soluciones**, ya que tiene tres columnas de la matriz escalonada (las columnas que corresponden a las incógnitas x_3, x_4, x_5) sin pivote.
En particular, el sistema **11f)** tiene solución si y sólo si k=-2 .

Para hallar las soluciones de **11e)** es conveniente llevar la matriz de los coeficientes a la forma escalonada reducida :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

11g) $\begin{cases} x-1=3z+21 \\ 2y+1=5z+35 \\ 5x-5=6y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3z=22 \\ 2y-5z=34 \\ 5x-6y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 22 \\ 0 & 2 & -5 & 34 \\ 5 & -6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 22 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2} & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

se le puede asignar un valor arbitrario, 2t , a la incógnita z en cuya columna no hay pivote, y se tiene : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22+6t \\ 17+5t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

[Nota : más adelante en este curso, veremos que esta es una representación paramétrica de la recta intersección de los planos de ecuaciones x-3z=22 , 2y-5z=34] .

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE12.- Basta verificar que cada una de las tres operaciones elementales de filas [aplicada a la matriz aumentada del sistema] no altera el conjunto de las soluciones del sistema.

i)Esto es evidente en el caso de la operación elemental que tiene por efecto intercambiar dos ecuaciones;
ii) tambien es inmediato para el caso de la operación elemental cuyo efecto es multiplicar una ecuación por un número no nulo;
iii) en el caso de la operación elemental cuyo efecto es "sumarle a una ecuación, otra multiplicada por un número k" veamos , a título de ejemplo la situación siguente :

$$\text{sistema A}\begin{cases} ax+by = m \\ cx+dy = n \end{cases}, \text{ sistema B}\begin{cases} (a+2c)x+(b+2d)y = m+2n \\ cx+dy = n \end{cases},$$

cuyas matrices aumentadas son, respectivamente $\begin{bmatrix} a & b & m \\ c & d & n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a+2c & b+2d & m+2n \\ c & d & n \end{bmatrix}$,

de las cuales la segunda se obtiene de la primera sumándole a la primera fila la segunda fila multiplicada por 2. En términos de sistemas esto significa sumarle, miembro a miembro, a la primera ecuación la segunda ecuación multiplicada por 2 y no es dificil convencerse que si (x, y) es solución del primer sistema entonces tambien es solución del segundo; inversamente y en forma análoga, la primera matriz se obtiene de la segunda sumándole a la primera fila la segunda multiplicada por -2 (así como el primer sistema se obtienen a partir del segundo sumándole, miembro a miembro, a la primera ecuación la segunda ecuación multiplicada por -2 , de manera que si (x, y) es solución del segundo sistema, tambien será solución del primero.

SE13.- i) si en la matriz A* hay una fila de ceros (es decir una fila nula) y la última componente de esa misma fila en la matriz aumentada $(A^*|\mathbf{b}^*)$ es $\neq 0$ entonces el sistema es **inconsistente** (no tiene solución);
si toda fila nula de A* se completa a una fila nula de la matriz aumentada, entonces el sistema es consistente (tiene solución);
ii) si el sistema es consistente y en cada columna de la matriz de los coeficientes escalonada, A*, hay un pivote, entonces la solución es **única** ;
iii) si el sistema es consistente y en la matriz de los coeficientes escalonada, A*, hay almenos una columna sin pivote, entonces hay infinitas soluciones.

SE14.-

SE14a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & a^2+3 & a+2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [faltaría dividir la segunda fila por 2 y

además en el caso que $a^2-1 \neq 0$, dividir la tercera fila por a^2-1 , sin embargo esto no es necesario si sólo queremos saber cuando el sistema es consistente y cuando no etc.

Podemos de inmediato afirmar que :
1) si $a^2-1 \neq 0$ el sistema es consistente y tiene <u>solución única</u>;
2) si $a^2-1=0$ y $a+1 \neq 0$ (es decir : si a=1) el sistema es <u>inconsistente</u>;
3) si $a^2-1=0$ y $a+1=0$ (es decir : si a= -1) el sistema es consistente y tiene un número infinito de soluciones;

14b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a^2+a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a^2-a & a-b \end{bmatrix}$;

i) si $a^2+a-2 \neq 0$, es decir , si $a \neq 1$, $a \neq -2$,(con b arbitrario), el sistema es consistente, tiene un número infinito de soluciones y se le pueden asignar valores arbitrarios a las incógnitas x_2, x_3, x_4 , en cuyas columnas no hay pivote;
ii) si a=1 y $b \neq 1$ o si a=-2 y $b \neq -2$ el sistema es inconsistente;
iii) si a=b=1 o si a=b=-2 el sistema es consistente y de nuevo tiene un número infinito de soluciones, pudiéndose asignar esta vez valores arbitrarios a las incógnitas x_2, x_3, x_4, x_5.
A título de ejemplo representemos el conjunto de todas las soluciones del sistema en el caso a=b=1 ; asignaremos los valores arbitrarios $x_2=\alpha$, $x_3=\beta$, $x_4=\chi$, $x_5=\delta$.
Entonces $x_1= 1- x_2- x_3- x_4-2x_5 = 1-\alpha-\beta-\chi-2\delta$;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-\alpha-\beta-\chi-2\delta \\ \alpha \\ \beta \\ \chi \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ;$$

14c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3a & 0 \\ 1 & 1 & a+2b & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & a-3b & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2b & 0 \end{bmatrix}$;

si $a \neq b$ hay solución única (la solución nula) **;** si a= b hay infinitas soluciones ;

14d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3a^2 & a \\ 1 & 1 & a^2+2b^2 & b \\ 1 & 0 & b^2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & b^2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+b^2 & b-1 \\ 0 & 0 & 2a^2-2b^2 & a-b \end{bmatrix}$; si $a \neq \pm b$ hay solución única;
si a=b hay un número infinito de soluciones;
si $a = -b \neq 0$ el sistema es <u>inconsistent</u>e ;

SE15. 15a) Verdadero. En efecto si el sistema A**x**=**0** tiene solución única en toda columna de la matriz escalonada, A* hay un pivote y como A, A* son "cuadradas" (es decir, tienen el mismo número de filas y columnas) hay un pivote en toda fila de A*, por lo cual

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

A* no puede tener filas nulas; por consiguiente aplicando el método de Gauss al sistema A**x**=**b** se obtiene A***x**=**b*** que tiene solución única;

15b). FALSO ; si A**x**=**0** tiene infinitas soluciones , la escalonada A* de A tiene almenos una columna sin pivote, luego su última fila nula, sin embargo con una **b** asignada no se puede asegurar que la última fila completa en la matriz (A*|**b***) sea también nula; a título de ejemplo, considérese el caso A=$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{bmatrix}$, **b**=$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$; entonces A*=$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$, **b***= $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ y el sistema $\begin{cases}x+2y=1\\3x+6y=1\end{cases}$ no tiene solución;

15c) Verdadero; si A**x**=**b** tiene infinitas soluciones, A* tiene una columna sin pivote por lo cual el sistema A**x**=**0** **(**que es consistente) tambien tiene infinitas soluciones;

15d) FALSO , ya que puede ser inconsistente; por ejemplo : $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+2z=1\end{cases}$;

15e) FALSO , ya que basta que una matriz escalonada, A*, de A tenga una columna sin pivote. Por ejemplo : $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+3z=0\\x+y+2z=-1\\z=-2\\3x+3y+4z=1\end{cases}$;

15f) **verdadero**, ya que el sistema A**x**=**0** siempre es consistente y al haber mas columnas que pivotes, seguramente hay almenos una columna sin pivote.